

Cálculo Económico e Empresarial

Tema 3: Rendas financeiras

Licenciaturas: Economia, Gestão e Gestão do Desporto

Luís Clemente-Casinhas

<https://luisclementecasinhas.org/>

Universidade Autónoma de Lisboa - Departamento de Ciências Económicas e Empresariais

26 de Abril, 2025

Tema 3: Rendas financeiras

Revisões de matemática

Revisões de matemática

Séries geométricas

- Série geométrica infinita:

$$S = a + ar + ar^2 + \dots = \frac{a}{1-r} \quad \text{para } |r| < 1$$

- Série geométrica finita com n termos:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n = a \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

Revisões de Matemática

Séries aritméticas

- Série aritmética (finita) com n termos:

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + [a + (n - 1)d] = \frac{n}{2} \times [2a + (n - 1)d]$$

- Também pode ser escrita como:

$$S_n = \frac{n}{2} \times (a + a_n)$$

onde $a_n = a + (n - 1)d$ é o último termo.

Tema 3: Rendas financeiras

Introdução

Introdução

- Até agora, analisaram-se movimentações individuais de capitais devido ao número reduzido de valores envolvidos. No entanto, há operações financeiras que incluem múltiplos fluxos de capital ao longo do tempo.
- Um exemplo prático é o de uma pessoa que deseja poupar para a reforma e decide abrir uma conta bancária. Suponha que o banco oferece uma taxa de juro efetiva anual de 6%. Qual será o montante acumulado ao fim de 25 anos no seguinte cenário?
 - Depósitos de EUR 3.000 hoje, EUR 5.000 após 3 anos e EUR 2.000 ao fim de 5 anos.
- Solução:
 - $V_{25} = 3.000 \times (1 + 0.06)^{25} + 5.000 \times (1 + 0.06)^{22} + 2.000 \times (1 + 0.06)^{20}$

Tema 3: Rendas financeiras

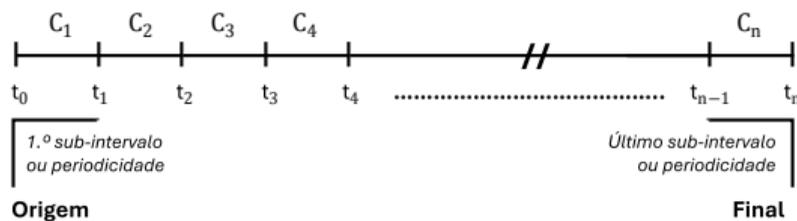
Conceito e elementos de uma renda financeira

Conceito e elementos de uma renda financeira

- Uma renda financeira consiste numa sucessão de capitais distribuídos ao longo do tempo com intervalos regulares.
- Os montantes dos capitais podem variar, não sendo necessário que sejam iguais.
- O critério essencial é que os capitais sejam movimentados em períodos de tempo constantes.
- Os quatro elementos necessários para definir uma renda são:
 - Duração da renda.
 - Período da renda.
 - Termos da renda.
 - Número de termos.

Conceito e elementos de uma renda financeira

- Duração, (t_0, t_n) : intervalo de tempo que decorre entre a origem (t_0) e o final da renda (t_n) .
- Períodos da renda: sub-intervalos nos quais se divide a duração da renda, $(t_0, t_1), (t_1, t_2), \dots, (t_{n-1}, t_n)$.
- Termos da renda: capitais financeiros (de quantia constante ou variável) que formam a renda, cada um associado a um período, $(C_1, t_1), (C_2, t_2), \dots, (C_n, t_n)$.
- Número de termos: número de capitais que compõem a renda, n .



Tema 3: Rendas financeiras

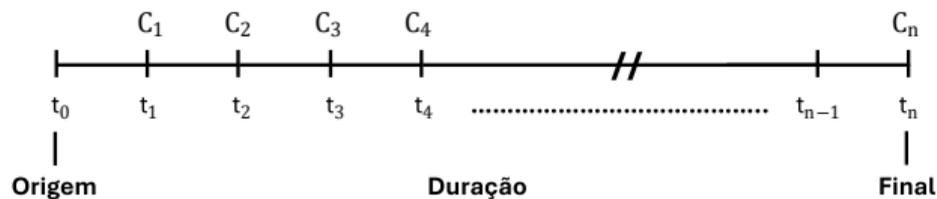
Classificação das rendas financeiras

Classificação das rendas financeiras

- Valor dos termos:
 - Constantes: todos os termos têm o mesmo valor.
 - Variáveis: os termos têm valores diferentes (progressão aritmética e geométrica).
- Duração:
 - Temporárias: o número de termos é finito.
 - Perpétuas: O número de termos pode ser considerado ilimitado.
- Período da renda:
 - Inteiras: coincide com o período a que está reportada a taxa.
 - Fracionadas: diferente do período a que está reportada a taxa.

Classificação das rendas financeiras

- Vencimento dos termos:
 - Normais/postecipadas: vencimento no final de cada período da renda.

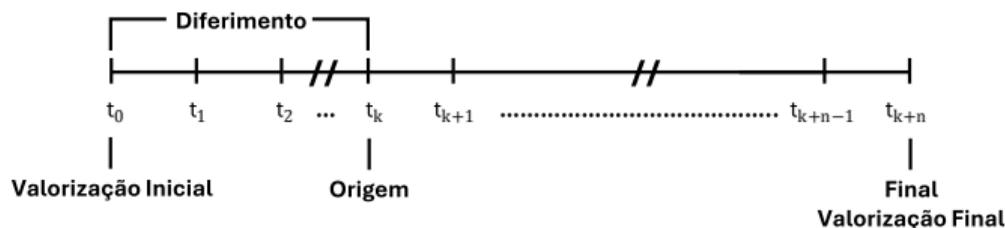


- Antecipadas: vencimento no início de cada período da renda.



Classificação das rendas financeiras

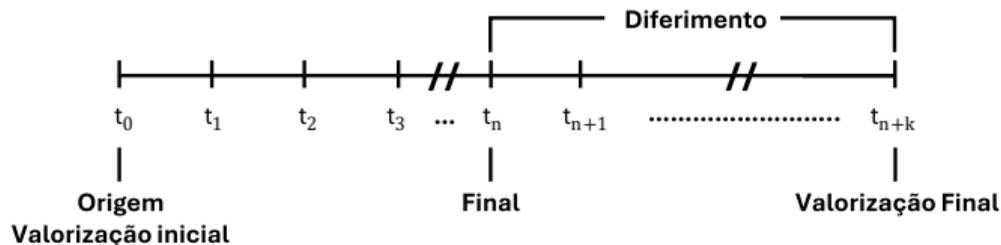
- Momento de referência:
 - Imediatas: o momento de valorização inicial coincide com a origem da renda e o momento de valorização final coincide com o final da renda.
 - Diferidas na origem: o momento de valorização inicial é anterior à origem da renda e o momento de valorização final é igual ao final da renda.



Classificação das rendas financeiras

- Momento de referência:

- Diferidas no final: o momento de valorização inicial é igual à origem da renda e o momento de valorização final é posterior ao final da renda.



Tema 3: Rendas financeiras

Análise e valorização das rendas

Análise e valorização das rendas

Valor financeiro das rendas financeiras

- O valor financeiro das rendas financeiras corresponde à soma financeira de todos os termos num determinado momento t (momento de valorização).
- O valor financeiro das rendas pode ser calculado em qualquer momento de tempo, mas habitualmente calcula-se na origem e no final da renda.
- Ao valor financeiro na origem chama-se valor atual e ao valor financeiro no momento de ocorrência do último termo chama-se valor final ou valor acumulado.
- As rendas são operações de longo prazo e, por isso, para a sua valorização utiliza-se o regime de juro composto, tanto para calcular o seu valor inicial como o valor final e os respetivos fatores de atualização e capitalização: $(1 + i)^n$ e $1/(1 + i)^n$.

Análise e valorização das rendas

- A análise e valorização das rendas será feita com base nos critérios definidos para as classificar.
- Rendas imediatas e temporárias:
 - Constantes: postecipadas e antecipadas.
 - Variáveis em progressão geométrica: postecipadas e antecipadas.
 - Variáveis em progressão aritmética: postecipadas e antecipadas.
- Rendas imediatas e perpétuas:
 - Constantes: postecipadas e antecipadas.
 - Variáveis em progressão geométrica: postecipadas e antecipadas.
 - Variáveis em progressão aritmética: postecipadas e antecipadas.
- Rendas diferidas (na origem e no final).
- Trataremos todas as rendas como inteiras: se a renda for fracionada, temos de converter a taxa para o período da renda.

Tema 3: Rendas financeiras

Rendas imediatas e temporárias

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e postecipadas

- O cálculo do valor atual ou inicial (período anterior ao primeiro vencimento) de uma renda unitária, é dado por:

$$a_{n|i} = \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

- Este é também designado por fator de atualização.
- Se a renda não for unitária mas sim igual a t , o seu valor atual será igual a:

$$V_0 = t \times a_{n|i} = t \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e postecipadas

- O cálculo do valor final ou acumulado de uma renda unitária, é dado por:

$$s_{n|i} = (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + 1 = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

- Este é também designado por fator de capitalização.
- Se a renda não for unitária mas sim igual a t , o seu valor final será igual a:

$$V_n = t \times s_{n|i} = t \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e postecipadas

Exercício 1

Calcule o valor atual e final de uma renda de 100 euros por ano, postecipada, a uma taxa de juro anual de 3%, nos seguintes casos:

- $n = 10$
- $n = 150$

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e postecipadas

Exercício 2

Calcule o valor atual e final de uma renda semestral de 8000 euros, postecipada, com duração de 20 anos, a uma taxa de juro anual de 7%.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e postecipadas

Exercício 3

Um indivíduo decide depositar determinada quantia de dinheiro numa conta bancária no final de cada ano. A taxa de juro anual utilizada é de 5%. Calcule:

- Quanto deve depositar anualmente, na conta, se quiser obter 25000€ daqui a 10 anos.
- Número de entregas de 3000€ cada para obter um capital de 33079.69€.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e postecipadas

- Devemos considerar que $a_{n|i}$ e $s_{n|i}$ representam o mesmo: o valor financeiro ou a soma financeira dos n termos de uma renda unitária constante e postecipada em momentos distintos no tempo.
- Podemos estabelecer a relação de equivalência entre os dois da seguinte forma:

$$s_{n|i} = a_{n|i} \times (1 + i)^n$$

- Esta relação é válida para as rendas que não são unitárias:

$$V_n = V_0 \times (1 + i)^n$$

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e postecipadas

Exercício 4

Um indivíduo espera obter, nos próximos 5 anos, um rendimento no final de cada ano de 2000 euros. Sendo a taxa de juro anual utilizada de 3.75% e considerando que a origem acontece a 15/02/2020, calcule o valor financeiro nos seguintes momentos:

- Início.
- Final.
- A 15/02/2023.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e postecipadas

Exercício 6

Calcule o capital que teremos numa conta bancária daqui a 10 anos, se depositarmos no final de cada ano 1500 euros, sabendo que o banco nos oferece uma taxa de juro anual de 10.5% para os primeiros 4 anos e 11% para o restante tempo.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e postecipadas

Exercício 7

Um indivíduo deposita num banco no final de cada ano 200€. Aplica-se uma taxa de juro anual de 3%. Se o período tiver a duração de 10 anos, qual é a quantia que este indivíduo poderá retirar anualmente nos próximos 16 anos?

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e postecipadas

Exercício 8

Um clube desportivo compra uns terrenos cujo preço é de 230000€, pagando 80000€ em dinheiro e comprometendo-se a pagar o restante em seis pagamentos anuais iguais. Qual deve ser o montante anual de cada pagamento se a taxa de juro aplicada for de 10% anual?

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e postecipadas

Exercício 9

Para que o seu filho de 14 anos receba um capital de 100000€ aos 23 anos, o Sr. X irá depositar uma determinada quantia no final de cada ano num banco, a uma taxa de juro anual de 3.5%. Calcule:

- Anuidade a entregar pelo Sr. X.
- A anuidade a entregar para obter o mesmo capital de 100000 euros, se no final do quinto ano o banco subir a taxa de juro para 4%.
- O montante a receber, se a mesma quantia fosse depositada desde o início, tendo em conta a alteração da taxa.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e postecipadas

Exercício 10

Pretende-se obter 200000€ num prazo de 10 anos através de um depósito anual de 8500€, mais dois montantes a depositar no final do quarto e sétimo anos: o primeiro é metade do segundo. Calcule o valor destes montantes se a taxa de juro for de 9% ao ano.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e postecipadas

Exercício 12

A empresa Yatis, SA dedica-se à venda de iates e proporciona a seguinte forma de pagamento: entregar 12000 euros no momento da compra, 24000 euros passados seis meses, 36000 euros um ano depois da compra e a partir do último pagamento 3000 trimestrais e postecipados durante 10 anos. Tendo em conta que a empresa vendedora aplica na operação uma taxa de juro anual de 5%, obtenha a quantia que teria que pagar um determinado comprador que queira pagar o iate a pronto-pagamento.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e antecipadas

- O cálculo do valor atual ou inicial (período anterior ao primeiro vencimento) de uma renda unitária, é dado por:

$$\ddot{a}_{n|i} = 1 + \frac{1}{(1+i)} + \frac{1}{(1+i)^2} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}}$$

- Este é também designado por fator de atualização.
- Se a renda não for unitária mas sim igual a t , o seu valor atual será igual a:

$$\ddot{V}_0 = t \times \ddot{a}_{n|i} = t \times \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}}$$

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e antecipadas

- O cálculo do valor final ou acumulado de uma renda unitária, é dado por:

$$\ddot{s}_{n|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}} (1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)$$

- Este é também designado por fator de capitalização.
- Se a renda não for unitária mas sim igual a t , o seu valor final será igual a:

$$\ddot{V}_n = t \times \ddot{s}_{n|i} = t \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)$$

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e antecipadas

Exercício 13

Calcule o valor atual e final de uma renda antecipada de termos anuais de 100€ a uma taxa de juro anual de 3%, nos seguintes casos.

- $n = 10$ anos.
- $n = 150$ anos.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes e antecipadas

Exercício 14

Determine a quantia que um indivíduo deve poupar no início de cada semestre, num determinado banco, que aplica uma taxa de juro anual de 3.5% durante 4 anos, uma vez que pretende obter um montante de 15000€.

Referências

- Teixeira-Quirós, J., Justino, M. & Encinas, B. (2023). *Fundamentos de Cálculo Económico e Empresarial* (2.ª ed.). ISBN: 978-972-8973-67-4.