

Cálculo Económico e Empresarial

Tema 3: Rendas financeiras

Licenciaturas: Economia, Gestão e Gestão do Desporto

Luís Clemente-Casinhas

<https://luisclementecasinhas.org/>

Universidade Autónoma de Lisboa - Departamento de Ciências Económicas e Empresariais

3 de Maio, 2025

Tema 3: Rendas financeiras

Rendas imediatas e temporárias

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes postecipadas e antecipadas

- Uma vez analisadas as rendas imediatas e temporárias de termos constantes, postecipadas e antecipadas, pode estabelecer-se a seguinte relação:

$$a_{n|i}(1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^ni} (1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{n-1}i} = \ddot{a}_{n|i}$$

- Para os valores finais também se verifica a relação anterior:

$$s_{n|i}(1+i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i) = \ddot{s}_{n|i}$$

- **Conclusão:** Valor financeiro antecipado = Valor financeiro postecipado $\times (1+i)$
 - Regra válida para todas as rendas imediatas.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes postecipadas e antecipadas

Exercício 16

O Sr. Lopes precisa de ter um capital de 40000 euros daqui a 8 anos, para os quais são propostas as seguintes alternativas:

- Fazer 8 depósitos constantes de valor t anuais antecipados, a uma taxa de juro anual de 8%.
- Fazer 6 depósitos constantes de valor t e 2 depósitos de valor $2t$ anuais postecipados, a uma taxa de juro anual de 8%.
- Fazer, no final de cada ano, 8 depósitos constantes. A taxa de juro aplicada é de 7% para os primeiros 5 anos e 9% para os restantes anos.

Determine a quantia para cada opção.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes postecipadas e antecipadas

Exercício 17

Um agricultor aluga uma quinta durante 10 anos. Sabendo que a renda no final de cada ano é de 100000 euros e que no início de cada ano é necessário pagar 20000 euros de aluguer e 30000 euros para sementes, fertilizantes e outras despesas, determine o lucro atualizado (diferença entre o valor atualizado das receitas e despesas) deste agricultor. A taxa de juro aplicada é de 7% anual.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas constantes postecipadas e antecipadas

Exercício 18

O proprietário de um imóvel recebe duas propostas de venda:

- O comprador A oferece 75000 euros em dinheiro, mais 75000 euros daqui a um ano e, deste último pagamento, 14 pagamentos semestrais no final de cada semestre, iguais a 50000 euros cada.
- O comprador B oferece-lhe 72 pagamentos mensais de 12500 euros cada, no início do mês, entregando o primeiro daqui a 2 anos.

Sabendo que a taxa de juro é de 5% anual, qual das duas ofertas é mais interessante para o proprietário?

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão geométrica e postecipadas

- Cada um dos capitais é igual ao anterior, multiplicado por r , tal que: $t_1 = t$, $t_2 = tr$, ..., $t_n = t_{n-1}r = tr^{n-1}$.
- O cálculo do valor atual de uma renda inicialmente igual a t , é dado por:

$$V_{0(g)} = \frac{t}{(1+i)} + \frac{tr}{(1+i)^2} + \dots + \frac{tr^{n-1}}{(1+i)^n} = t \times \frac{1 - \left(\frac{r}{1+i}\right)^n}{1+i-r}$$

- Quando $r = 1 + i$:

$$V_{0(g)} = \frac{t \times n}{1+i}$$

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão geométrica e postecipadas

- O cálculo do valor final de uma renda inicialmente igual a t , é dado por:

$$V_{n(g)} = V_{0(g)}(1+i)^n = t \frac{(1+i)^n - r^n}{1+i-r}$$

- Quando $r = 1+i$:

$$V_{n(g)} = V_{0(g)}(1+i)^n = t \times n(1+i)^{n-1}$$

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão geométrica e postecipadas

Exercício 19

Uma renda anual e postecipada cujo primeiro termo é de 600 euros e o restante cresce anualmente em progressão geométrica de 3%. Calcule o seu valor atual e final se for aplicada uma taxa de juro anual de 5% durante 8 anos.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão geométrica e postecipadas

Exercício 21

Um indivíduo vai receber, nos próximos 10 anos, uma pensão anual no valor de 60000 euros, durante o primeiro ano, com um crescimento acumulado de 3% anual. Solicita substituí-la por uma pensão com a mesma duração, mas com pagamentos mensais em vez de anuais. Qual o valor dos pagamentos mensais que o indivíduo irá receber aplicando uma taxa de juro anual de 4% e sabendo, ainda, que os pagamentos mensais crescem a uma taxa mensal de 0.3%.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão geométrica e postecipadas

Exercício 25

Um indivíduo deseja fazer uma poupança ao longo de 10 anos. Para isso, deposita no final de cada ano os seguintes montantes: no primeiro ano 3600 euros e nos restantes anos vai diminuindo à razão de 5% acumulados anualmente. Calcule o montante de capital a constituir no final dos 10 anos com uma taxa de juro de 6% anual.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão geométrica e antecipada

- O cálculo do valor atual de uma renda que vence no início do período, sendo inicialmente igual a t , e em que o capital seguinte é igual ao anterior multiplicado por r , é dado por:

$$\ddot{V}_{0(g)} = V_{0(g)}(1+i) = t \times \frac{1 - \left(\frac{r}{1+i}\right)^n}{1+i-r}(1+i)$$

- Quando $r = 1+i$:

$$\ddot{V}_{0(g)} = V_{0(g)}(1+i) = t \times n$$

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão geométrica e antecipada

- O cálculo do valor final de uma renda inicialmente igual a t , é dado por:

$$\ddot{V}_{n(g)} = V_{n(g)}(1+i) = t \frac{(1+i)^n - r^n}{1+i-r} (1+i)$$

- Quando $r = 1+i$:

$$\ddot{V}_{n(g)} = V_{n(g)}(1+i) = t \times n(1+i)^n$$

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão geométrica e antecipadas

Exercício 20

A aquisição de um veículo será efetuada através de 5 pagamentos anuais, o primeiro no momento da entrega do veículo. Os pagamentos crescem anualmente numa progressão geométrica de 6%. Sabendo que o preço do veículo a pronto pagamento é de 50000 euros e que é aplicada uma taxa de juro anual de 4%, determine o valor do primeiro pagamento.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão geométrica e antecipadas

Exercício 22

Uma empresa adquiriu, hoje, um equipamento pelo qual terá que pagar uma renda trimestral antecipada durante 6 anos, cujo primeiro pagamento é de 4500 euros e os seguintes crescem de forma cumulativa com uma razão de 3% trimestral. A empresa solicitou ao seu fornecedor que substituísse esses pagamentos por um único capital no prazo de 4 anos. Aplica-se uma taxa de juro nominal de 8% com capitalização trimestral. Calcule o montante do capital.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão aritmética e postecipadas

- Cada um dos capitais é igual ao anterior mais uma quantia constante, r , tal que: $t_1 = t$, $t_2 = t + r$, ..., $t_n = t_{n-1} + r = t + (n - 1)r$.
- Se $r > 0$ a renda é crescente e se $r < 0$ a renda é decrescente. Para evitar capitais negativos ou nulos, impõe-se que $t + (n - 1)r > 0 \implies r > -t/(n - 1)$
- O cálculo do valor atual de uma renda inicialmente igual a t , é dado por:

$$V_{0(A)} = \frac{t}{(1+i)} + \frac{t+r}{(1+i)^2} + \dots + \frac{t+(n-1)r}{(1+i)^n} = \left(t + \frac{r}{i}\right) a_{n|i} - \frac{r \times n}{i(1+i)^n}$$

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão aritmética e postecipadas

- O cálculo do valor final de uma renda inicialmente igual a t , é dado por:

$$V_{n(A)} = \left(t + \frac{r}{i}\right) s_{n|i} - \frac{r \times n}{i}$$

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão aritméticas e postecipadas

Exercício 23

Calcule o valor atual e o valor final de uma renda postecipada de 10 termos variáveis em progressão aritmética, sabendo que o valor do primeiro prazo ascende a 2000 euros, e o seguinte cresce à razão de 400 euros e a taxa de juro é 10% anual.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão aritméticas e postecipadas

Exercício 24

Calcule o valor atual e final de uma renda de 20 termos trimestrais postecipados, sabendo que o primeiro termo é de 100 euros e os restantes crescem de um período para outro em 4 euros. A taxa de juro é de 6% anual.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão geométrica e postecipadas

Exercício 26

Deposita-se um capital que dá direito a receber um rendimento anual de 12 termos postecipados e em termos variáveis na progressão aritmética de razão 2500 euros, sendo a quantia do primeiro termo de 25000 euros. Se a taxa de juro aplicada é de 10% anual, calcule:

- O capital depositado.
- O primeiro termo de uma renda anual de 10 termos e variáveis no aumento da progressão geométrica, ao final do ano, à razão de 3% acumulado anual equivalente ao capital acumulado.
- A quantia de uma renda anual, constante e postecipada de 7 termos equivalentes ao capital acumulado.

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão aritmética e antecipada

- O cálculo do valor atual de uma renda que vence no início do período, sendo inicialmente igual a t , e em que o capital seguinte é igual ao anterior mais r , é dado por:

$$\ddot{V}_{0(A)} = V_{0(A)}(1+i) = \left(t + \frac{r}{i}\right) \ddot{a}_{n|i} - \frac{rn}{i(1+i)^{n-1}}$$

Rendas imediatas e temporárias

Rendas variáveis em progressão aritmética e antecipada

- O cálculo do valor final de uma renda inicialmente igual a t , é dado por:

$$\ddot{V}_{n(A)} = V_{n(A)}(1+i) = \left(t + \frac{r}{i}\right) \ddot{s}_{n|i} - \frac{rn}{i}(1+i)$$

Referências

- Teixeira-Quirós, J., Justino, M. & Encinas, B. (2023). *Fundamentos de Cálculo Económico e Empresarial* (2.ª ed.). ISBN: 978-972-8973-67-4.