

Cálculo Económico e Empresarial

Tema 4: Amortização de empréstimos

Licenciaturas: Economia, Gestão e Gestão do Desporto

Luís Clemente-Casinhas

<https://luisclementecasinhas.org/>

Universidade Autónoma de Lisboa - Departamento de Ciências Económicas e Empresariais

17 de Maio, 2025

Tema 4: Rendas financeiras

Introdução

Conceito e elementos de um empréstimo

Conceito

- Um empréstimo é um acordo contratual no qual uma parte, denominada mutuante (ou credor), disponibiliza um determinado montante a outra, o mutuário (ou devedor), que assume a obrigação de restituir esse valor acrescido dos juros previamente definidos.
- Do ponto de vista do mutuário, ocorrem fluxos de entrada (*inflows*) – relativos ao montante recebido – e fluxos de saída (*outflows*) – correspondentes aos pagamentos efetuados para reembolsar o capital e liquidar os juros devidos.
- Cada prestação é composta por duas partes: a amortização do capital e o valor dos juros associados.

Conceito e elementos de um empréstimo

Principais características dos empréstimos

- O credor é, geralmente, uma instituição financeira, e o devedor uma pessoa singular ou coletiva.
- É celebrado um contrato que define as condições financeiras do empréstimo, incluindo:
 - O montante de capital disponibilizado.
 - A taxa de juro nominal acordada.
 - A frequência com que os juros gerados serão pagos.
 - A periodicidade das amortizações do capital.
 - O método adotado para a amortização do empréstimo.
 - Comissões associadas ao empréstimo, como as de abertura, análise, cancelamento, entre outras.
- Em qualquer instante, um equilíbrio entre o valor da prestação e o valor da contraprestação.
- Dado que os empréstimos normalmente se enquadram em operações de médio a longo prazo, aplica-se a capitalização ou atualização com base em juros compostos.

Conceito e elementos de um empréstimo

Elementos/variáveis de um empréstimo

- m_k : valor correspondente à parte da k -ésima prestação que se destina à amortização do capital, também conhecida como principal.
- C_0 : montante inicial do empréstimo, ou principal, que representa o capital cedido pelo credor ao mutuário no início da operação e que deverá ser totalmente amortizado até ao final do contrato.
 - A finalidade da amortização de capital é amortizar o capital emprestado:

$$C_0 = \sum_{s=1}^n m_s = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$$

- Os empréstimos são operações financeiras e, por isso:

$$C_0 = \frac{m_1}{1+i} + \frac{m_2}{(1+i)^2} + \frac{m_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{m_n}{(1+i)^n}$$

Conceito e elementos de um empréstimo

Elementos/variáveis de um empréstimo

- C_k : saldo devedor existente imediatamente após o pagamento da k -ésima prestação, ou seja, o capital ainda por amortizar nesse momento.
- M_k : total de capital já amortizado desde o início do empréstimo até um determinado ponto no tempo. Este valor pode ser obtido de duas formas:
 - Somatório de todas as amortizações pagas até ao momento k :

$$M_k = \sum_{s=1}^k m_s = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_k$$

- Por diferença entre o capital emprestado e o capital em dívida em k :

$$M_k = C_0 - C_k \implies C_k = C_0 - M_k$$

Conceito e elementos de um empréstimo

Elementos/variáveis de um empréstimo

- P_k : a k -ésima prestação, correspondente ao pagamento efetuado para cumprir o contrato de empréstimo, inclui capital e juros e é geralmente paga no final de cada período definido.
- J_k : componente da k -ésima prestação relativa aos juros, calculada com base no capital em dívida nesse momento.

$$J_k = C_{k-1} \times i \text{ ou } J_k = P_k - m_k$$

Conceito e elementos de um empréstimo

Elementos/variáveis de um empréstimo

- O quadro de amortização consiste numa tabela que apresenta, para cada período, os valores das variáveis analisadas anteriormente, permitindo acompanhar a evolução do empréstimo.

n	P_k	J_k	m_k	C_k	M_k
0	-	-	-	C_0	-
1	P_1	$J_1 = C_0 \times i$	$m_1 = P_1 - J_1$	$C_1 = C_0 - m_1$	$M_1 = C_0 - C_1$
...
k	P_k	$J_k = C_{k-1} \times i$	$m_k = P_k - J_k$	$C_k = C_{k-1} - m_k$	$M_k = C_0 - C_k$
...
n	P_n	$J_n = C_{n-1} \times i$	$m_n = P_n - J_n$	$C_n = C_{n-1} - m_n = 0$	$M_n = C_0 - C_n = C_0$

Conceito e elementos de um empréstimo

Elementos/variáveis de um empréstimo

Exercício 2

O Banco X oferece a um dos seus clientes um empréstimo de 6000 euros a uma taxa anual de 10%, que deve ser reembolsado através de 4 prestações anuais nos seguintes montantes: 1600€, 2500€, 1300€ e 2200€. Solicita-se:

- Calcule o capital em dívida nos momentos 0, 3 e 4.
- Elabore a tabela de amortização.
- Represente graficamente a evolução temporal do capital em dívida deste empréstimo.

Métodos de reembolso

Método retrospectivo

- Trata-se de determinar o capital em dívida num dado instante k , tendo por base os fluxos financeiros com vencimento **anterior ou igual** a esse momento – ou seja, analisando o **histórico** da operação.
- Para calcular esse capital em dívida, procede-se à capitalização, até ao instante k , de todos os montantes vencidos até esse ponto, comparando os valores associados à prestação com os da contraprestação, sendo o capital em dívida a diferença entre ambos.

$$C_k = C_0(1+i)^k - P_1(1+i)^{k-1} - P_2(1+i)^{k-2} - \dots - P_k$$

Métodos de reembolso

Método prospetivo

- Neste caso, o capital em dívida num determinado instante k é calculado com base nos fluxos financeiros que têm vencimento **após** esse momento, ou seja, com foco no **futuro** da operação.
- Para determinar o capital em dívida, procede-se à atualização, até ao instante k , de todos os montantes cujo vencimento ocorre depois desse ponto no tempo.

$$C_k = \frac{P_{k+1}}{(1+i)} + \frac{P_{k+2}}{(1+i)^2} + \dots + \frac{P_n}{(1+i)^{n-k}}$$

Métodos de reembolso

Método recorrente

- Neste método, o capital em dívida em um determinado instante k é calculado com base no capital em dívida no momento anterior, ou seja, no instante $k - 1$.
- O capital em dívida é obtido através da seguinte fórmula:

$$C_k = C_{k-1} + C_{k-1}i - P_k = C_{k-1}(1 + i) - P_k$$

Métodos de reembolso

Exercício 1

Considere um empréstimo de 100000 euros que foi concedido a uma taxa de 10% ao ano e será reembolsado num prazo de quatro anos com reembolsos anuais de 35000€, 32500€ e P_4 . Calcule:

- A quantia de P_4 .
- O capital em dívida no final do primeiro ano pelo método recorrente.
- O capital em dívida no final do segundo ano pelo método retrospectivo e prospetivo.

Classificação de empréstimos

Segundo a sua duração

- Curto-prazo: inferior a um ano.
- Médio-prazo: oscila entre os 12 meses e os 3 anos.
- Longo-prazo: superior a três anos.

Classificação de empréstimos

Segundo a taxa de juro

- Taxa de juro fixa: taxa que permanece constante ao longo de toda a duração do empréstimo.
 - Mesmo que haja alterações na taxa de juro de referência, os pagamentos que o mutuário deve realizar para devolver o empréstimo permanecem inalterados.
- Taxa de juro variável: taxas que podem variar ao longo da operação, sendo estas determinadas previamente ou ajustadas periodicamente.
- Taxas de juro mistas: a taxa de juro é fixa durante uma série de períodos e variável nos períodos seguintes.
 - O período com taxa fixa é, normalmente, definido no início da operação.

Classificação de empréstimos

Segundo o vencimento dos juros

- Juros postecipados: são pagos no final de cada período em que o empréstimo é dividido.
- Juros antecipados: são pagos no início de cada período em que o empréstimo é dividido.

Classificação de empréstimos

Segundo o método de amortização

- Métodos de amortização única ou reembolso único: o capital emprestado é totalmente amortizado no final da operação.
 - Empréstimo simples: os juros são pagos de forma acumulada no término da operação.
 - Método Americano simples: os juros são pagos periodicamente durante a duração do empréstimo.

Classificação de empréstimos

Segundo o método de amortização

- Métodos de amortização escalonada (ou progressiva): envolvem pagamentos periódicos.
 - Baseados no valor das prestações:
 - Constantes, também conhecido como método Francês.
 - Variáveis com progressão geométrica.
 - Variáveis com progressão aritmética.
 - Variáveis com outro tipo de relação ou sem qualquer relação definida entre elas.
 - Baseados no valor da amortização de capital:
 - Constante, também conhecido como método Italiano.
 - Prestações variáveis com progressão geométrica.
 - Prestações variáveis com progressão aritmética.
 - Prestações variáveis com outro tipo de relação ou sem qualquer relação definida entre elas.

Tema 4: Amortização de empréstimos

Métodos de amortização única ou reembolso único

Empréstimo simples

- No momento da concessão do empréstimo, o credor entrega ao devedor o capital inicial C_0 .
- Durante os períodos de 1 até $n - 1$, as prestações são iguais a zero: $P_1 = P_2 = \dots = P_{n-1} = 0$.
- No período n , a prestação P_n é paga, sendo suficiente para cobrir os juros acumulados e amortizar o capital emprestado.
- Se a equivalência entre a prestação e a contraprestação ocorrer em $t = 0$, então temos a seguinte condição:

$$C_0 = \frac{P_n}{(1+i)^n} \implies P_n = C_0(1+i)^n$$

- Sabendo que $m_n = C_0$:

$$J_n = P_n - m_n = C_0(1+i)^n - C_0 = C_0[(1+i)^n - 1]$$

Empréstimo simples

Exercício 3

Um banco concede a um dos seus clientes um empréstimo de 6000 euros a uma taxa de juro anual de 6%. Ambas as partes concordam que o empréstimo será amortizado numa única prestação com pagamento de juros acumulados. Sabendo que o empréstimo tem uma duração de 3 anos, determine o valor que o devedor deve pagar e o valor dos juros.

Método Americano simples

- No momento da concessão do empréstimo, o credor entrega ao devedor o capital inicial C_0 .
- Durante os períodos de 1 até $n - 1$, as prestações são constantes e iguais a $P_1 = P_2 = \dots = P_{n-1} = C_0i$, onde i é a taxa de juro aplicável.
- No período n , a prestação P_n é paga, sendo suficiente para cobrir os juros acumulados do último período e amortizar o capital emprestado.

$$P_n = J_n + C_0 = C_0i + C_0 = C_0(1 + i)$$

- Se a equivalência se der em $t = 0$, temos que:

$$C_0 = C_0i \times a_{n|i} + \frac{C_0}{(1 + i)^n}$$

Método Americano simples

Exercício 4

Um banco concede a um dos seus clientes um empréstimo de 6000 euros a 6% ao ano. Ambas as partes concordam que o empréstimo será amortizado numa única amortização com pagamento anual de juros. Determine o capital que o mutuário deve pagar se o empréstimo tiver duração de 3 anos e a evolução temporal do capital em dívida.

Referências

- Teixeira-Quirós, J., Justino, M. & Encinas, B. (2023). *Fundamentos de Cálculo Económico e Empresarial* (2.ª ed.). ISBN: 978-972-8973-67-4.