

Cálculo Económico e Empresarial

Tema 2: Regime de Equivalência

Licenciaturas em Economia, Gestão e Gestão do Desporto

Luís Clemente-Casinhas

<https://luisclementecasinhas.org/>

Universidade Autónoma de Lisboa - Departamento de Ciências Económicas e Empresariais

22 de Março, 2025

Tema 2: Regime de Equivalência

Capitalização em regime de juro simples

Capitalização em regime de juro simples

- A capitalização consiste em projetar valores para momentos futuros, após a data de vencimento original;
- O juro gerado em cada período (juro periódico, j_k) não se acumula nos períodos seguintes;
- O juro é retirado do processo por ser pago imediatamente (juro simples 'puro') ou apenas retido (juro 'denominado' simples);
- Se a taxa de juro permanecer inalterada, o juro periódico mantém-se constante;
- O capital no início de cada período não sofre alterações;
- Este modelo é mais utilizado para operações de curto prazo.

Capitalização em regime de juro simples

- O juro depende do capital (C), do período de tempo (n) e da taxa de juro (i).
- É essencial que n e i estejam expressos na mesma unidade temporal, garantindo homogeneidade.
- Dessa forma, se a taxa de juro for mensal, trimestral ou anual, os períodos correspondentes devem ser mensais, trimestrais ou anuais, respectivamente.

Capitalização em regime de juro simples

Capital acumulado

- O capital acumulado resulta da soma do capital inicial com o juro total gerado até aquele instante.

Período	Capital inicial	Juro periódico	Capital acumulado
1	C_0	$J_1 = C_0 \times i$	$C_1 = C_0 \times (1 + i)$
2	C_0	$J_2 = C_0 \times i$	$C_2 = C_0 \times i + C_0 \times (1 + i) = C_0 \times (1 + 2 \times i)$
3	C_0	$J_3 = C_0 \times i$	$C_3 = C_0 \times i + C_0 \times (1 + 2 \times i) = C_0 \times (1 + 3 \times i)$
...
n	C_0	$J_n = C_0 \times i$	$C_n = C_0 \times i + C_0 \times (1 + (n - 1) \times i) = C_0 \times (1 + n \times i)$

- O juro simples total é calculado por: $J = C_0 \times n \times i$
- O capital acumulado sob juro simples é dado por: $C_n = C_0 \times (1 + n \times i)$

Capitalização em regime de juro simples

Sumário

- O fator de capitalização em juro simples é expresso por: $FCS = (1 + n \times i)$
- O capital acumulado em juro simples é calculado por: $C_n = C_0 \times (1 + n \times i)$
- O juro total em juro simples pode ser obtido por: $J = C_0 \times n \times i$ ou $J = C_n - C_0$

Capitalização em regime de juro simples

Exercício 1

Calcule o montante obtido ao investir 2000€ a uma taxa de juro anual de 8% durante 4 anos, em regime de juro simples.

Capitalização em regime de juro simples

Exercício 2

Calcule durante quantos meses deve ser investido um capital de 7000€, a uma taxa de juro anual de 10.5% em regime de juro simples, se se obtém um capital final de 8470 euros.

Capitalização em regime de juro simples

Exercício 3

Calcule a taxa de juro anual, em regime de juro simples, proporcionada por uma determinada entidade bancária, se ao depositar 6575€ durante 4 anos, a entidade bancária devolve 9731€.

Capitalização em regime de juro simples

Exercício 4

Uma entidade financeira oferece duas opções para investir dois capitais.

Opção A: um depósito de 12000€ durante 6 anos obtendo um montante de 18000€.

Opção B: um depósito de 10000€ durante 5 anos obtendo um montante de 15000€.

Calcule a taxa de juro anual, em regime de juro simples, para cada uma das opções e diga qual a melhor opção.

Capitalização em regime de juro simples

Exercício 7

Calcule os juros anuais e totais produzidos por 300€ investidos durante 4 anos a uma taxa de juro de 7%, em regime de juro simples.

Capitalização em regime de juro simples

- Quando a taxa de juro varia ao longo do tempo:

Período	Capital inicial	Juro periódico	Capital acumulado
1	C_0	$J_1 = C_0 \times i_1$	$C_1 = C_0 \times (1 + i_1)$
2	C_0	$J_2 = C_0 \times i_2$	$C_2 = C_0 \times i_2 + C_0 \times (1 + i_1) = C_0 \times (1 + i_1 + i_2)$
3	C_0	$J_3 = C_0 \times i_3$	$C_3 = C_0 \times i_3 + C_0 \times (1 + i_1 + i_2) = C_0 \times (1 + i_1 + i_2 + i_3)$
...
n	C_0	$J_n = C_0 \times i_n$	$C_n = C_0 \times (1 + i_1 + i_2 + \dots + i_n)$

- O capital acumulado em juro simples, com taxa variável, é dado por: $C_n = C_0 \times (1 + i_1 + i_2 + \dots + i_n)$
- O juro total em juro simples é calculado por: $J = C_n - C_0$

Capitalização em regime de juro simples

Exercício 5

Determine o montante, se forem depositados 5000€ em regime de juro simples, durante 7 anos, com as seguintes taxas de juro anuais:

1.º ano: 5%.

2.º ano: 6%.

3.º e 4.º anos: 7%.

5.º, 6.º e 7.º anos: 4%.

Capitalização em regime de juro simples

Exercício 8

Determine os juros anuais e totais que se obtém, se investimos 3000€ durante 4 anos, com as seguintes taxas de juro anuais:

1.º ano: 4%.

2.º ano: 6%.

3.º e 4.º anos: 8%.

Capitalização em regime de juro simples

Cálculo dos juros quando a duração da operação é expressa em dias (inferior a um ano)

- A capitalização em RJS é utilizada essencialmente nas operações que com duração inferior a um ano.
- Neste tipo de operações, é habitual a taxa de juro ser anual mas a duração seja expressa em dias.
- Para calcular os juros é necessário que se proceda à homogeneização da duração e da taxa de juro: normalmente transforma-se os dias em anos.

$$n = \frac{\text{número de dias da operação financeira}}{\text{número de dias do ano}}$$

- Denominador igual a 360 se o critério for o ano comercial.
- Denominador igual a 365 se o critério for o ano natural ou civil.

Capitalização em regime de juro simples

Cálculo dos juros quando a duração da operação é expressa em dias (inferior a um ano)

Exercício 9

Calcule os juros produzidos por 10000€ investidos a uma taxa de juro anual de 8%, em regime de juro simples, tendo em conta que a operação tem uma duração de 66 dias. Aplique o ano comercial e o ano civil.

Capitalização em regime de juro simples

Cálculo dos juros quando a duração da operação é expressa em dias (inferior a um ano)

Exercício 10

Calcule os juros que geram 5000€ investidos a uma taxa de juro anual de 6%, em regime de juro simples, sabendo que esta operação tem início a 3 de Fevereiro de 2018 até 10 de Novembro de 2018. Utilize o ano comercial e o ano civil.

Capitalização em regime de juro simples

Duração e taxa de juro expressas em unidades de tempo diferentes

- A frequência ou periodicidade da capitalização refere-se à regularidade com que os juros são calculados numa operação financeira.
- Representa o intervalo entre dois períodos consecutivos de vencimento dos juros (por exemplo, capitalização anual, semestral, mensal, etc.).
- Quando a duração de uma operação financeira e a taxa de juro têm unidades de tempo diferentes, existem duas opções:
 - Transformar a duração para a homogeneizar com a taxa de juro (lógica do slide 15).
 - Transformar a taxa de juro para a homogeneizar com a duração (slide seguinte).

Capitalização em regime de juro simples

Duração e taxa de juro expressas em unidades de tempo diferentes

- Se i é a taxa de juro anual, i_k a periódica, e k a frequência de capitalização:

k	Denominação	i_k	
2	Semestre	i_2	Taxa de juro semestral
3	Quadrimestre	i_3	Taxa de juro quadrimestral
4	Trimestre	i_4	Taxa de juro trimestral
12	Mês	i_{12}	Taxa de juro mensal
360	Dia comercial	i_{360}	Taxa de juro diária

- A relação entre a taxa i e i_k é dada por: $i = k \times i_k$ e $i_k = i/k$
- A partir disso, conclui-se que o capital acumulado é calculado por:

$$C_n = C_0 \times (1 + n \times i) = C_0 \times (1 + n \times k \times i_k)$$

Capitalização em regime de juro simples

Frequência ou periodicidade da capitalização

Exercício 11

Calcule as seguintes taxas de juro:

- A taxa de juro trimestral equivalente a 10% anual.
- A taxa de juro anual equivalente a 3% semestral.
- A taxa de juro quadrimestral equivalente a 1% mensal.

Capitalização em regime de juro simples

Exercício 12

Calcule o montante que geram 12000€ em regime de juro simples da seguinte forma:

- 5% trimestral durante 2 anos.
- 1% mensal durante 2 semestres.
- 8% anual durante 24 meses.

Capitalização em regime de juro simples

Exercício 13

Calcule os juros que produzem os seguintes capitais investidos a uma taxa de juro trimestral, $i_4 = 2\%$, em regime de juro simples, durante os seguintes tempos:

- 5000€ - 2 quinzenas.
- 25000€ - 5 meses.
- 30000€ - 3 semestres.
- 20000€ - 2 trimestres.

Capitalização em regime de juro simples

Exercício 14

Um capital é investido a uma taxa de juro trimestral de 1.5%, em regime de juro simples, durante 3 anos. Metade dos juros obtidos são reinvestidos durante 6 meses a uma taxa de juro anual de 7%. Sabendo que a soma do capital inicial e do montante obtido ao segundo reforço é de 54657.5€, calcule:

- O capital inicial.
- Os juros obtidos em cada um dos investimentos.

Tema 2: Regime de Equivalência

Atualização em regime de juro simples

Atualização em regime de juro simples

- A atualização consiste em ajustar capitais a momentos anteriores ao seu vencimento.
- Em operações de atualização/desconto com juros simples:
 - $C_0 < C_n$, com a diferença $C_n - C_0$ sendo chamada de desconto (D);
 - O valor inicial é um montante futuro conhecido (valor nominal ou C_n) que se deseja antecipar;
 - O desconto representa o valor a ser pago para antecipar essa quantia.
- Existem duas formas de calcular o valor do desconto:
 - Abordagem racional (ou desconto "por dentro"): A taxa de juro, i , é aplicada ao capital atual C_0 , logo, $D = C_0 \times n \times i$.
 - Abordagem comercial (ou desconto "por fora"): A taxa de desconto, d , é aplicada ao capital nominal C_n , logo, $D_c = C_n \times n \times d$.

Atualização em regime de juro simples

Abordagem racional

- O desconto racional funciona como o inverso da capitalização.
- Quando capitalizamos um valor presente, adicionamos os juros ao longo do tempo. No desconto racional, fazemos o caminho oposto: descobrimos qual era o valor inicial que, ao ser capitalizado, chegaria ao valor nominal do ativo.
- O desconto racional corresponde exatamente aos juros que seriam gerados pelo capital aplicado no período até o vencimento.
- O desconto racional reflete o valor do dinheiro no tempo.
- Exemplos de situações onde se utiliza o desconto racional simples: Obrigações do Tesouro (com cupão).

Atualização em regime de juro simples

Abordagem racional

- O fator de atualização racional simples é dado por:

$$FARS = \frac{1}{1 + n \times i}$$

- O capital atual em regime de juro simples é calculado por:

$$C_0 = \frac{C_n}{1 + n \times i}$$

- O valor do desconto racional simples é:

$$D = C_n - C_0 = C_0 \times n \times i$$

Atualização em regime de juro simples

Abordagem racional

Exercício 6

Calcule o capital depositado há 3 anos numa entidade bancária, a uma taxa de juro anual de 10% em regime de juro simples, se hoje recebemos 1950€.

Atualização em regime de juro simples

Abordagem comercial

- O desconto comercial é calculado com base no valor nominal de um ativo, sem se precisar primeiro calcular o valor presente: aplica-se a operações de curto prazo e a taxas de juro reduzidas, para evitar que o capital atual se torne negativo.
- Este método superestima o valor do desconto e, subestima o valor presente do ativo.
- Se aplicássemos o fator de capitalização ao valor do ativo descontado comercialmente, não chegaríamos ao valor nominal do ativo no vencimento.
- O limite teórico para a utilização do desconto comercial simples é dado por: $n = \frac{1}{i}$.
- Exemplos de situações em que se utiliza o desconto comercial simples: juros antecipados; desconto bancário de letras.

Atualização em regime de juro simples

Abordagem comercial – Desconto Bancário de Letras

- Uma letra é um título de crédito que especifica o montante da dívida (valor nominal) e a respetiva data de vencimento, sendo o valor nominal referente a essa data.
- Caso se deseje antecipar o recebimento desse valor, pode solicitar-se a uma instituição de crédito o desconto da letra.
- O desconto bancário é a operação pela qual o portador da letra recebe antecipadamente da instituição bancária o valor nominal, subtraído de uma quantia correspondente a encargos legais ou contratuais estabelecidos para a operação.

Atualização em regime de juro simples

Abordagem comercial

- O fator de atualização comercial simples é expresso por:

$$FACS = (1 - n \times d)$$

- O capital atual em regime de juro simples, pela abordagem comercial, é dado por:

$$C_0 = C_n \times (1 - n \times d)$$

- O valor do desconto comercial simples é:

$$D_c = C_n - C_0 = C_n \times n \times d$$

Atualização em regime de juro simples

Abordagem comercial

Exercício 42

Calcule o valor efetivo que se obtém ao descontar uma letra de 30000€ com um vencimento daqui a 6 meses, ao qual se aplicou uma taxa de desconto anual de 12%.

Atualização em regime de juro simples

Abordagem comercial

Exercício 43

Uma letra de 2000€ é descontada hoje a uma taxa de desconto anual de 15%, obtendo-se um valor efetivo de 1925€. Determine o vencimento da letra.

Atualização em regime de juro simples

Abordagem comercial

Exercício 44

Calcule a taxa de desconto anual aplicada numa letra comercial de 6500€ que vence daqui a 7 meses, sabendo que o valor efetivo obtido é de 5707.70€.

Atualização em regime de juro simples

Abordagem comercial

Exercício 45

Calcule o desconto simples de um valor nominal de 1250€, com uma taxa de desconto igual a 6% e um período de 3 meses.

Atualização em regime de juro simples

Relação de equivalência entre i e d

- A equivalência entre a taxa de juro (i) e a taxa de desconto simples (d) é fundamentada nas fórmulas $C_0 = C_n \times (1 - n \times d)$ e $C_n = C_0 \times (1 + n \times i)$.
- Ao substituir, chega-se à seguinte expressão: $C_0 = C_0 \times (1 + n \times i) \times (1 - n \times d)$.
- Daí, obtemos as relações: $i = \frac{d}{1-n \times d}$ e $d = \frac{i}{1+n \times i}$.
- A taxa de juro, i , é sempre superior à taxa de desconto equivalente, d .
- A equivalência entre i e d depende da duração da operação, sendo assim uma função temporal.

Atualização em regime de juro simples

Relação de equivalência entre i e d

Exercício 41

Três letras de valor 5000, 13000 e 15000 euros, com vencimento em 3, 8 e 10 meses, respetivamente, foram descontadas num banco que aplica uma taxa de desconto anual de 7%. Determine as taxas de juro equivalentes à taxa de desconto aplicada para cada um dos casos.

Atualização em regime de juro simples

Exercício 15

Dois capitais cuja soma é de 35500€, estiveram depositados, em regime de juro simples, com a mesma taxa de juro durante o mesmo período de tempo, produzindo um capital final de 13125€ e 24150€.

Quais eram os capitais iniciais?

Atualização em regime de juro simples

Exercício 16

Um indivíduo pretende investir dois capitais da seguinte forma: o primeiro, com uma taxa de juro mensal de 1% durante 1 ano e seis meses, e o segundo, que é o dobro do primeiro, a uma taxa de juro trimestral de 4% durante o mesmo tempo. Sabendo que a soma dos montantes é igual a 36600€, determine os capitais investidos.

Atualização em regime de juro simples

Exercício 17

Dois capitais são investidos da seguinte forma: o primeiro a uma taxa de juro anual de 6% durante n anos. O segundo a uma taxa de juro anual de 8% durante $2n$ anos. Sabendo que o primeiro é 10000€ maior que o segundo e que os juros obtidos por ambos são iguais, determine a quantia dos capitais.

Referências

- Teixeira-Quirós, J., Justino, M. & Encinas, B. (2023). *Fundamentos de Cálculo Económico e Empresarial* (2.ª ed.). ISBN: 978-972-8973-67-4.