

Cálculo Económico e Empresarial

Tema 2: Regime de Equivalência

Licenciaturas em Economia, Gestão e Gestão do Desporto

Luís Clemente-Casinhas

<https://luisclementecasinhas.org/>

Universidade Autónoma de Lisboa - Departamento de Ciências Económicas e Empresariais

5 de Abril, 2025

Tema 2: Regime de Equivalência

Equivalência de capitais

Equivalência de capitais

Regra de ouro do cálculo financeiro

- A regra de ouro do cálculo financeiro estabelece que, dado o valor temporal do dinheiro, para comparar capitais é necessário reportá-los a um mesmo momento.
 - A introdução dos fatores tempo e juro implica que se introduza o conceito de homogeneização de capitais.
 - Na resolução de qualquer problema que envolva capitais reportados a momentos diferentes é essencial exprimi-los primeiramente numa mesma unidade.
- A equação de equivalência (equação de valor) traduz a equivalência, num determinado momento (data focal), de dois capitais, de um capital e um conjunto de capitais ou de um conjunto de capitais.
- A data focal corresponde ao momento considerado para estabelecer a equação de equivalência, i.e. no qual se pretende exprimir todos os capitais envolvidos.

Equivalência de capitais

- Dependendo da data focal, a equação de equivalência pode ser:
 - Atualizar todos os capitais;
 - Capitalizar todos os capitais;
 - Atualizar alguns e capitalizar outros.
- Dependendo do número de capitais:
 - Equivalência de dois capitais;
 - Equivalência de um capital e de um conjunto de capitais;
 - Equivalência de dois conjuntos de capitais.
- Dependendo do regime de juro:
 - Regime de juro simples: capitalizar ou atualizar (solução comercial ou racional);
 - Regime de juro composto: capitalizar ou atualizar (solução racional).

Equivalência de capitais

- Em regime de juro simples:
 - A equivalência de capitais é afetada pelo tempo que falta para o vencimento dos capitais.
 - É comum que a equação de valor seja estabelecida no momento zero (data focal conhecida).
 - Dois capitais podem ser equivalentes em uma data e não equivalentes em outra.
- Em regime de juro composto:
 - A equivalência de capitais não é afetada pelo tempo que falta para o vencimento ou pelo tempo decorrido desde o vencimento;
 - A equação do valor pode ser estabelecida tomando qualquer momento como data de referência.

Equivalência de capitais

Regime de Juro Simples			Regime de Juro Composto		
Capitalização	Atualização		Capitalização	Atualização	
	Solução Comercial	Solução Racional		Solução Comercial	Solução Racional
$FCS = (1 + ni)$	$FACS = (1 - ni)$	$FARS = \frac{1}{1+ni}$	$FCC = (1 + i)^n$	$FACC = (1 - i)^n$	$FARC = (1 + i)^{-n}$

Equivalência de capitais

- Para resolver uma equação de equivalência, é preciso responder a três questões essenciais:
- O quê?: Quais os capitais envolvidos de um lado e do outro que devem ser equiparados?
- Quando?: Qual é a data focal para a operação de equivalência, ou seja, o momento escolhido para a comparação?
- Como?: De que forma a equivalência será estabelecida? Usaremos o regime de juro simples ou composto? Em caso de atualização, será adotada a solução racional ou comercial?

Equivalência de capitais

Exercício 18

Dado um capital de 10000€ que se vence hoje e outro capital de 12500€ que se vence daqui a 3 anos, verifique se são equivalentes no momento $t = 5$ e no momento $t = 6$. A taxa de juro anual desta operação é de 10% em regime de juro simples.

Equivalência de capitais

Exercício 19

Temos uma dívida de 1000€ que deve ser paga hoje. Acordou-se com o credor substituir a dívida por três pagamentos: o primeiro de 250€ com vencimento hoje; o segundo de 500€ com vencimento daqui a 1 ano; e o terceiro de quantia C_2 com vencimento daqui a 2 anos. Se nesta operação for aplicada uma taxa de juro anual de 8% em regime de juro simples, determine a quantia do último pagamento, supondo que:

- O momento de equivalência é estabelecido em $t = 2$.
- O momento de equivalência é estabelecido em $t = 3$.

Equivalência de capitais

Exercício 20

Dado um capital de 10000€ que vence em $t = 2$, calcule o seu capital equivalente no momento $t = 4$ de duas formas:

- Capitalizando diretamente os 10000€ até ao momento $t = 4$.
- Atualizando os 10000€ ao momento $t = 0$ e posteriormente capitalizando a quantia obtida até ao momento $t = 4$.

A taxa de juro utilizada é de 10% anual em regime de juro simples.

Equivalência de capitais

Exercício 21

Um empresário tem três dívidas ao mesmo fornecedor de 2000, 4000 e 5000 euros com vencimentos a 6, 8 e 10 meses, respetivamente. O empresário propõe ao seu fornecedor substituir as três dívidas por uma só. Se a operação se realiza com uma taxa de juro anual de 8%, em regime de juro simples, e a equivalência financeira for no momento $t = 0$, calcule:

- A quantia do capital que o empresário terá de pagar daqui a 9 meses.
- Vencimento do capital de 11200€ que substitui os três anteriores (vencimento comum).

Equivalência de capitais

Exercício 35

Verifique se 10000€ hoje e 13310€ que vencem daqui a 3 anos são equivalentes daqui a 5 anos? E daqui a 6 anos? A operação realiza-se com uma taxa de juro anual de 10% em RJC.

Equivalência de capitais

Exercício 36

Temos uma dívida de 1000€ que deve ser paga hoje. Acordou-se com o credor substituir a dívida por três pagamentos: o primeiro de 250€ com vencimento hoje, o segundo de 500€ com vencimento daqui a 1 ano e o terceiro de quantia C com vencimento daqui a 2 anos. Se nesta operação for aplicada uma taxa de juro anual de 8% em regime de juro composto, determine a quantia do último pagamento, supondo que:

- O momento de equivalência é estabelecido em $t = 2$.
- O momento de equivalência é estabelecido em $t = 3$.

Equivalência de capitais

Exercício 37

Dado um capital de 10000€ que se vence daqui a 2 anos, calcule o seu capital equivalente no final do quarto ano da seguinte forma:

- Capitalizando diretamente ao momento $t = 4$.
- Atualizando primeiro até ao momento $t = 0$ e posteriormente capitalizando até ao momento $t = 4$.

A taxa de juro é de 10% anual em regime de juro composto.

Equivalência de capitais

Exercício 38

Um empresário tem três dívidas com os mesmos fornecedores de 5000, 9000 e 10000 euros, com vencimentos daqui a 2, 4 e 5 anos, respetivamente. O empresário propõe ao seu fornecedor substituir os três pagamentos por um só. Se a operação se realizar com uma taxa de juro anual de 10%, em regime de juro composto, calcule:

- Quanto terá o empresário que pagar se os três pagamentos se substituem por um só que vence daqui a 3 anos.
- Quando deverá ocorrer o pagamento se o empresário e o fornecedor acordam substituir os três pagamentos por um só de 21000€.

A taxa de juro é de 10% anual em regime de juro composto.

Equivalência de capitais

Exercício 39

Dois indivíduos decidem investir 18000€ cada um, durante 3 anos. O primeiro investe o seu dinheiro a uma taxa de juro anual de 7% em regime juro simples e o segundo indivíduo a uma taxa de juro anual de 7% em regime de juro composto. Calcule:

- Os juros anuais.
- Os juros totais.
- O montante que recebem daqui a 3 anos.
- Que taxa de juro anual simples teria que investir o primeiro indivíduo para obter os mesmos juros totais que o segundo indivíduo.

Equivalência de capitais

Exercício 40

Dois capitais foram depositados durante 15 anos da seguinte forma: o primeiro a uma taxa de juro de 8% em regime de juro composto e o segundo a uma taxa de juro de 8% em regime de juro simples. Sabendo que os juros gerados por ambos os capitais são os mesmos e que o segundo é superior ao primeiro em 40500€, determine as quantias.

Equivalência de capitais

Exercício 46

Determinada empresa desconta as seguintes letras numa entidade bancária:

$$C_{n1} = 5000, n_1 = 30;$$

$$C_{n2} = 15000, n_2 = 60;$$

$$C_{n3} = 10000, n_3 = 90.$$

O banco aceita descontar as letras com as seguintes taxas de desconto: para letras com vencimento até 45 dias, aplicar a taxa anual de 12%; para letras com vencimento entre 46 a 75 dias, aplicar a taxa anual de 13%; e para as letras com vencimento superior a 75 dias, aplicar uma taxa anual de 14%. Além disso o banco fixa uma comissão de 0.5% sobre o valor nominal de cada letra com o mínimo de 40€ por cada letra. Calcule a quantia que a empresa recebe ao descontar as letras.

Equivalência de capitais

Exercício 47

Um comerciante tem em seu poder duas letras, o valor nominal da primeira é de 3000€ e vence daqui a 6 meses e o valor nominal da segunda é de 4000€ e vence daqui a 9 meses. O devedor das letras propõe ao comerciante trocá-las por uma só letra que vence daqui a 3 meses. Se a operação se realiza com uma taxa de desconto de 6%, determine a quantia da nova letra com os seguintes pressupostos:

- A equivalência financeira dá-se daqui a 3 meses.
- A equivalência financeira dá-se hoje.

Equivalência de capitais

Exercício 48

Uma letra de 20000€ que se vence daqui a 2 anos vai ser substituída por 4 letras que vencem daqui a 6, 12, 18 e 24 meses de tal forma que, a segunda letra é o dobro da primeira, a terceira é o triplo e a quarta letra é quatro vezes a primeira. Calcule o valor nominal das quatro letras, se a taxa de desconto aplicada na operação for de 10% anual.

Equivalência de capitais

Exercício 49

Um fabricante propõe a um cliente que compre uma máquina cujo preço, a pronto pagamento, é de 110250€, mediante o pagamento de 4 letras do mesmo valor e cujos vencimentos são daqui a 3, 6, 9 e 12 meses a partir do momento da compra. Para esta operação, aplica-se o desconto comercial simples e uma taxa de desconto anual de 13%. Calcule o valor das letras.

Tema 2: Regime de Equivalência

Taxas de juro

Taxas de juro

- Refere-se ao valor de juro gerado por um investimento de uma unidade monetária durante um determinado período (geralmente 1 ano);
- É o custo pago pelos agentes que necessitam de financiamento para garantir acesso aos fundos;
- Também representa a rendibilidade que o mutuário obtém ao adiar o uso desses fundos no seu consumo;
- Nos mercados financeiros, as taxas de juro são apresentadas anualmente e são nominais;
- São um dos principais instrumentos da política monetária para influenciar variáveis macroeconómicas, como o nível de preços, o desemprego e o investimento.

Taxas de juro

Taxa de juro proporcional

- Taxa de Juro Proporcional: duas taxas são proporcionais se o quociente entre elas for igual ao quociente dos períodos de tempo a que se referem.

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

- Exemplo: uma taxa anual de 20% e uma taxa semestral de 10% são proporcionais, pois:

$$\frac{0.20}{0.10} = \frac{2}{1}$$

Taxas de juro

Taxa equivalentes

- Taxa de Juro Equivalente: duas taxas são equivalentes quando fazem com que o mesmo capital gere o mesmo montante ao final do mesmo período, considerando a capitalização.

$$(1 + i_1)^{t_1} = (1 + i_2)^{t_2}$$

- Exemplo: uma taxa anual de 21% e uma taxa semestral de 10% são equivalentes, pois:

$$(1 + 0.10)^2 = 1.1^2 = 1.21 \Rightarrow i = 21\%$$

Taxas de juro

Taxa nominal

- Taxa Nominal (TAN), $i_{(K)}$: indica a taxa de juro contratual, expressa numa base anual, sem considerar o efeito da capitalização intra-anual.
- É apenas uma taxa de referência pelo que nunca deverá ser aplicada diretamente a qualquer capital.
- A taxa nominal anual é obtida através de uma relação de proporcionalidade (soma das taxas periódicas i_K em cada um dos K períodos do ano), ou seja:

$$i_{(K)} = i_K \times K$$

- Exemplo: uma TAN de 12% ao ano, com capitalização mensal, significa que a taxa mensal nominal é de 1%.

Taxas de juro

Taxa efetiva

- Taxa Efetiva (TAE), i : reflete o impacto das capitalizações sucessivas ao longo do tempo, representando o custo real do capital, logo a que deve ser aplicada a capitais.
- É obtida através de uma relação de equivalência:

$$C_n = C_0(1 + i) = C_0 (1 + i_K)^K = C_0 \left(1 + \frac{i_{(K)}}{K}\right)^K \implies (1 + i) = (1 + i_K)^K = \left(1 + \frac{i_{(K)}}{K}\right)^K$$

- Exemplo: se a TAN for 12% ao ano com capitalização mensal, a TAE será:

$$i = \left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12} - 1 \approx 12.68\%$$

Taxas de juro

Resumo das Taxas de Juro

Tipo de Taxa	Definição	Fórmula
Taxa Nominal (TAN)	Taxa contratual sem capitalização intra-anual	$i_{(K)} = K \cdot i_K$
Taxa Efetiva (TAE)	Taxa que reflete a capitalização dos juros	$i = (1 + i_K)^K - 1$
Taxa Proporcional	Razão entre taxas igual à razão entre períodos	$i_1/i_2 = t_1/t_2$
Taxa Equivalente	Gera o mesmo montante final para um capital inicial	$(1 + i_1)^{t_1} = (1 + i_2)^{t_2}$

Taxas de juro

Exercício 32

Determinado indivíduo decide colocar 5000€ numa conta bancária durante 3 anos. As ofertas que recebeu são as seguintes:

Banco A: 6% nominal capitalizado por anos.

Banco B: 6% nominal capitalizado por semestres.

Banco C: 6% nominal capitalizado trimestralmente.

Banco D: 6% nominal capitalizado mensalmente.

Determine o montante utilizando a taxa de juro efetiva periódica.

Taxas de juro

Exercício 33

Considerando uma taxa de juro anual efetiva de 5%, calcule as suas seguintes taxas nominais equivalentes: $i_{(1)}$, $i_{(2)}$, $i_{(4)}$, $i_{(12)}$ e $i_{(360)}$.

Taxas de juro

Exercício 34

Um indivíduo precisa de um empréstimo de 20000€ e consulta várias entidades bancárias que lhe fazem as seguintes ofertas:

Banco A: 5% nominal capitalizável por semestres.

Banco B: 4.8% nominal capitalizável por meses.

Banco C: 5.4% anual.

Banco D: 1.25% trimestral.

Determine a melhor oferta.

Referências

- Teixeira-Quirós, J., Justino, M. & Encinas, B. (2023). *Fundamentos de Cálculo Económico e Empresarial* (2.ª ed.). ISBN: 978-972-8973-67-4.